数理解析研究所講究録
473巻 1982年 25-49

Injective action of affine group schemes over a field of positive characteristic

筑波大数学系　志賀野洋(Hiroshi Shigano)

G, X を各々体k上のアフィン群スキーム、アフィンスキームとする。$u: X\times G \longrightarrow X$ をGのXへの右からの作用とすると、その余射 $\mathcal{O}(u): \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(G)$ は $\mathcal{O}(X)$ にホップ代数 $\mathcal{O}(G)$ 上の右余加群代数の構造を与える。$\mathcal{O}(X)$ が単射的 $\mathcal{O}(G)$ 余加群になるとき、作用uを単射的作用（injective action）という。単射的作用の重要な例であり、かつこの研究の動機となったものは、次の2つである。

(イ)（[3] 或いは [16]）

Xがアフィンk群スキーム、Gがその閉部分群スキーム、作用uは右乗法としたとき、uが単射的作用であるための必要十分条件は $X\tilde{/}G$ がアフィンスキームになることである。

(ロ)（[3], 定理3.1）

Gが代数的閉体k上の連結ユニポテント代数群とし

たとき、次の条件(1), (2), (3)は同値である。

(1) uは単射的作用である。

(2) 右$\mathcal{O}(G)$余加群代数射 $f: \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ が存在する。

(3) 右$\mathcal{O}(G)$余加群射 $g: \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ で $g(1) = 1$ なるものが存在する。

これらの条件が成立するとき、$X/\!\!\tilde{\ }G$が存在し、アフィンスキームになる。さらに、Gの作用もこめて、Xは$(X/\!\!\tilde{\ }G) \times G$ に同形である。

この結果、特に(ロ)を見れば、Gがユニポテントでない時はどうなるのかというのは自然な問であろう。本稿の目的は次の単射的作用の構造定理を示すことである。

kが代数的閉体、G, Xが既約な代数多様体ならば Gの完全可約閉部分群Hと、XのH安定な閉部分スキームYが存在して、XはGの作用もこめて、「ひねり積(twisted product)」$Y \times_H G$ に同形である。ここで「ひねり積」とは、$Y \times G$ へのHの作用 $(y, g) \longmapsto (yh^{-1}, hg)$ による商であり、Gのそれへの作用は、G成分への右乗法による作用である。特に、$X/\!\!\tilde{\ }G$と$Y/\!\!\tilde{\ }H$がアフィンスキームになるのは同値であり、この時、実は$X/\!\!\tilde{\ }G$と$Y/\!\!\tilde{\ }H$

は同形で、既約な代数多様体になる。

問題をホップ代数的観点からみてみよう。Hをアフィンk群Gの完全可約な閉部分k群、$A=\mathcal{O}(G)$，$B=\mathcal{O}(H)$とする。Sを任意の右B余加群代数とする。Hの完全可約性よりSは単射的右B余加群である。従って、余テンソル積 $S\square_B A$ は単射的右A余加群である。故に、Gの $X=\mathrm{Sp}_k(S\square_B A)$ への作用は単射的作用である。さらに、この場合 $\mathrm{Sp}_k(S\square_B A)=Y\times_H G$、ただし $Y=\mathrm{Sp}_k S$、がいえる。この逆が正に示そうとしている構造定理に他ならない!! 即ち、単射的作用は、完全可約部分群の作用を持ち上げたものに尽きるということである。

Gが可解、或いはkが標数零の時は、Gが完全可約群とユニポテント根基との半直積になることから簡単に証明できる。問題は正標数（かつ非可解）の時である。この時は、上の構造定理を証明するのには、現在のところ、もう一つの仮定(☆)が必要である。

仮定(☆)　$\mathcal{O}(X)$に含まれる$\mathcal{O}(G)$余加群としてのkの単射包絡のうちで、それで生成された$\mathcal{O}(X)$の部分代数が、k代数としてk上有限生成になるようなものが少なくとも1つある。

変な条件であるが、これは取り除くことができるだろうと考えている。即ち、次の予想を持っている。

予想。$\mathcal{O}(X)$ に含まれる $\mathcal{O}(G)$ 余加群としての k の単射包絡で生成され $\mathcal{O}(X)$ の部分代数は、k 代数として k 上有限生成である。

§1. G が可解、或いは k が標数零の場合。

まずこの簡単な場合を説明し、正標数の場合の理解の助けとしたい。

さて、G が可解の時は、[2], VII, 定理3.2 より、また k の標数が零の時は、[2], VII, 定理4.3 より、$G = G_u \rtimes F$, G_u は G のユニポテント根基、F は極大完全可約部分群（勿論、G が可解の時は、極大トーラス）、となる。自然な射の合成

$$F \hookrightarrow G \longrightarrow G/G_u \xrightarrow{\sim} F$$

は恒等射であるから、それらの余射の合成

$$\mathcal{O}(F) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(G) \xrightarrow{p} \mathcal{O}(F)$$

も恒等射である．[16], 補題4 と [1], 3章2.5節と4章4節より、次の結果を得る。$A = \mathcal{O}(G)$, A_0 を A の余根基とした時

(1) $i : \mathcal{O}(F) \xrightarrow{\sim} A_0$ 。従って p は A_0 上では恒等射になるホップ代数射 $\pi : A \longrightarrow A_0$ を引き起こす。

(2) ホップ代数として $A/AA_0^+ \simeq \mathcal{O}(G_u)$ 。ここで AA_0^+ は

$A_0^+ = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_A \cap A_0$ で生成されたイデアル（ホップイデアルになる）を表わすものとする。

(3) 自然な射 $A \longrightarrow A/AA_0^+$ を $k\square_{A_0}({}_\pi A)$ に制限したものはk代数の同形射である。ここで ${}_\pi A$ はAをπに沿って左A_0余加群とみたものである。

さて、A_0は余半単純であるから、kは単射的右A_0余加群である。πに沿った係数拡大、$?\square_{A_0}({}_\pi A)$ は単射性を保存するから、$k\square_{A_0}({}_\pi A)$ は単射的右A余加群である。ところで $k\square_{A_0}({}_\pi A)$ の socle はkである。事実、

$$\mathrm{Soc}(k\square_{A_0}({}_\pi A)) = k\square_{A_0}({}_\pi A)\square_A A_0 = k\square_{A_0} A_0 = k$$

従って、$k\square_{A_0} A$ は、Aに含まれるkの単射包絡である。

[2], XII, 定理4.2 より、$\mathcal{O}(G_u)$ はk上の多項式環である。従って、上の(2)と(3)より、$k\square_{A_0}({}_\pi A)$ もk上の多項式環である。$k\square_{A_0}({}_\pi A) \equiv R \equiv k[T_1, \ldots, T_n]$ とする。

Xを任意のアフィンkスキーム（kが代数的閉体、Gが連結なアフィン代数群であることは[2]の結果を使っているので必要ではあるが、Xが既約なアフィン代数多様体である必要はない）でGの作用が単射的作用であるとする。$Q = \mathcal{O}(X)$とし、$u_Q : k \longrightarrow Q$ を右A余加群Rの部分右A余加群kからQへの自然な埋め込みとすれば、u_Qは右A余加群射ゆえ、Qの単射性より、u_Qは $\phi : R \longrightarrow Q$ とRまで拡張するこ

とができる。今、k代数射 $\Phi: k[T_1,\ldots,T_n]=R \longrightarrow Q$ を各 i について $\Phi(T_i)=\phi(T_i)$ で定義する。ϕ が右A余加群射であることから、Φ も右A余加群射になることは簡単にいえる。故に Φ は右A余加群代数射である。ところで $\Phi(1)=1$，即ち Φ は R の socle $(=k)$ 上で1対1ゆえ、Φ は単準同形である。Q を Φ を通して R 加群とみると、Q は右 (R, A) ホップ加群になる。（土井氏の記法に従えば、右 (A, R) ホップ加群である）次に述べる竹内光弘氏による定理より、右A余加群として、

$$Q \xrightarrow{\sim} (Q/QR^+)\square_{A_0} A \quad , \quad q \longmapsto \sum \overline{q_{(0)}} \otimes q_{(1)}$$

この同形射は、今の場合は、代数射でもあるから、右A余加群代数として同形である。$Y = Sp_k(Q/QR^+)$，$H = Sp_k A_0$ ととれば、目的の構造定理

$$X = Sp_k Q \simeq Sp_k((Q/QR^+)\square_{A_0} A) \simeq Y \times_H G$$

を得る。

以上がこの場合の証明の概略である。上で使った竹内氏の定理を次に述べ、その後、正標数の場合の要のアイデアを述べよう。余テンソルとひねり積の関係は次節に改めて説明しよう。次の竹内氏の結果は、考えているホップ代数が可換代数でなくても成立する結果もあるが、ここではすべて可換としておく。

Rをホップ代数Aの右余イデアル部分代数、即ち、Aの右余イデアルでありかつ部分代数であるもの、とする。AR^+を$R^+ = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_A \cap R$で生成された$A$のイデアルとすれば、これはホップイデアルになる。$\pi : A \longrightarrow A/AR^+$を自然なホップ代数射とする。($\pi$に沿った)係数制限とは、右$A$余加群$M$を、

$M \xrightarrow{\rho_M} M \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \pi} M \otimes A/AR^+$ (ρ_MはMの構造射)で右A/AR^+余加群とみることであった。この関手は(πに沿った)係数拡大と呼ばれる右随伴関手を持った。即ち、右A/AR^+余加群Nに対して、右余加群$N \square_{A/AR^+} A$がNを係数拡大したものであった。今、Mが右(R, A)ホップ加群のとき、係数制限は、関手$M \mapsto M/MR^+$を引き起す。これも係数拡大を右随伴関手として持つ。

定理T(竹内[16]) A, Rを上述の如くとする。

(1)(定理1) AがR上忠実平坦ならば、上記の二つの関手は、右(R, A)ホップ加群の圏$\mathcal{M}_R^A$と右A/AR^+余加群の圏$\mathcal{M}^{A/AR^+}$の間の同値を与える。さらに、この時、$R = k \square_{A/AR^+} A$であり、AはA/AR^+上忠実余平坦、即ち、係数拡大は忠実完全関手になる。

(2)(定理3) 次の2つの集合を考える。

$\mathcal{R} = \{ R\,;\ R$はAの右余イデアル部分代数でAはR上忠実平坦$\}$

$\mathcal{I} = \{ I\,;\ I$はAのホップイデアルでAはA/I上忠実余平坦$\}$

このとき対応は、$R \mapsto AR^+$ と $I \mapsto k\square_{A/I}R$ は互いに逆対応になっている。

(3)（定理10） $G = Sp_k A$, $H = Sp_k A/I$, ただし I は A のホップイデアル、$H\tilde{\backslash}G$ を右剰余類のつくる f.p.q.c. k層とする。(2)を幾何的に解釈すれば $H\tilde{\backslash}G$ がアフィンスキームであることと A が A/I 余平坦であることは同値である。さらにこの時、$H\tilde{\backslash}G = Sp_k(k\square_{A/I}A)$ を得る。

尚、次の同値がいえている。

(イ) A は A/I 上忠実余平坦である。

(ロ) A は $\mathcal{M}^{A/I}$ の中の単射的余生成素である。

(ハ) A は単射的右 A/I 余加群である。

(イ)と(ロ)の同値は[17], 命題A.2.1 に、(ロ)と(ハ)の同値は[12], 定理1.6 の系に証明されている。

また、(2)の対応は、部分ホップ代数と正規ホップイデアルの間の全単射を与えている。([15])

前の説明に補足を加える。A_0 は余半単純ゆえ、A は単射的右 A_0 余加群（π に沿って正則右 A 余加群 A を係数制限して）である。(ハ)と(イ)の同値より、定理T(2)を使え、$R = k\square_{A_0}A$ は定理T(1)の条件を満足することがわかる。故に $Q \simeq (Q/QR^+)\square_{A_0}A$ となる。

$Sp_k((Q/QR^+)\square_{A_0}A)=Y\times_H G$ となることを説明する前に、正標数の時の要のアイデアを説明しておこう。

Qを単射的右A余加群代数とする。$E_Q(k)$, $E_A(k)$を各々QとAに含まれるkの単射包絡(右A余加群としての)とする。勿論、それらは同形 ある。上に説明した場合は、$E_A(k)$として$R=k\square_{A_0}A$がとれ、$E_Q(k)$として$\Phi(R)$をとることができた。それらは、右A余加群代数として同形であった。従って、QをΦを通してR加群とみたとき、Qを右(R,A)ホップ加群とみることができ、その構造定理(定理T(1))を使うことができた。しかし、正標数で非可解のときは、$E_A(k)$をAの部分代数としてとれるとは限らない。そこで、$E_Q(k)$, $E_A(k)$で生成されるQ, Aの部分代数$\langle E_Q(k)\rangle$, $\langle E_A(k)\rangle$を考える。このとき、それらは、右A余加群代数として同形になるであろうというのが要のアイデアである。

§2 余テンソル積とひねり積

1節で述べた $Sp_k((Q/QR^+)\square_{A_0}A)=Y\times_H G$ を説明する。

ことわらずに使ってきたが、k群、kスキーム、k層などは[4]の用法に従うことにする。圏 M_k, M_kE, $\widetilde{M_kE}$, Sch_k などの説明は、その本を参照して下さい。

Xをkスキーム、GをXに右から作用しているk群とす

る。$T \in \mathbb{M}_k$, $x \in X(T)$, $g \in G(T)$ に対して $d_i : X \times G \to X$, $i = 0, 1$, を $d_0(x, g) = x$, $d_1(x, g) = xg$ とおく。$Sch_k(\widetilde{\mathbb{M}_k\mathbb{E}})$ での (d_0, d_1) の余核を X の G による軌道 k スキーム（k層）と呼ぶ（[4], III, §2, 1.3）。$\widetilde{\mathbb{M}_k\mathbb{E}}$ での余核は常に存在する．それを $X\tilde{/}G$ で表わす。

B をホップ代数 A の商ホップ代数、π を自然なホップ代数射 $A \longrightarrow B$，S を右 B 余加群代数とする。$G = Sp_k A$, $H = Sp_k B$, $Y = Sp_k S$ とおく。今考えている $Y \times G$ への H の作用は $(y, g) \longmapsto (yh^{-1}, hg)$ であった。ひねり積 $Y \times_H G$ は $\widetilde{\mathbb{M}_k\mathbb{E}}$ における次の完全系列で定義される。

$$\begin{tikzcd} Y \times H \times G \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Y \times G \arrow[r] & Y \times_H G \end{tikzcd}$$

ただし、$d_0(y, h, g) = (y, g)$, $d_1(y, h, g) = (yh^{-1}, hg)$ である。

さて、k 代数のつくる図式

$$\begin{tikzcd} S \otimes A \arrow[r, shift left, "\vartheta(d_0)"] \arrow[r, shift right, "\vartheta(d_1)"'] \arrow[d, equal] & S \otimes B \otimes A \arrow[d, "\phi"] \\ S \otimes A \arrow[r, shift left, "1 \otimes \lambda_A"] \arrow[r, shift right, "\rho_S \otimes 1"'] & S \otimes B \otimes A \end{tikzcd}$$

を考える。ただし、$\vartheta(d_0)$, $\vartheta(d_1)$ は各々 d_0, d_1 の余射、$\lambda_A = (\pi \otimes 1)\Delta_A$，$\phi(s \otimes b \otimes a) = \sum_{(a)} s \otimes \sigma_B(b)\pi(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$ （σ_B は B の

対合射とする)。ϕ は対合的ゆえ同形射である。また

$\theta(d_0)(s\otimes a) = s\otimes 1\otimes a$, $\theta(d_1)(s\otimes a) = \sum_{(s)(a)} s_{(0)}\otimes \sigma_B(s_{(1)})\pi(a_{(1)})\otimes a_{(2)}$

である。容易に $\phi\circ\theta(d_0) = 1\otimes\lambda_A$, $\phi\circ\theta(d_1) = \rho_S\otimes 1$ がわかる。$S\,\square_B A = \mathrm{Ker}(\rho_S\otimes 1 - 1\otimes\lambda_A)$ が定義であるから、$S\,\square_B A = \mathrm{Ker}(\theta(d_1) - \theta(d_0))$ を得る。従って

$$0 \longrightarrow S\,\square_B A \longrightarrow S\otimes A \underset{\theta(d_1)}{\overset{\theta(d_0)}{\rightrightarrows}} S\otimes B\otimes A$$

は可換 k 代数の圏での equalizer 図式である。

命題 1. 上の状況下で考える。A が単射的右 B 余加群ならば、$Y\times_H G = \mathrm{Sp}_k(S\,\square_B A)$ である。

証明。 $S\otimes A$ が $S\,\square_B A$ 上忠実平坦であることを示せばよい。事実、それがいえれば、上述の equalizer 図式は、完全系列

$$Y\times H\times G \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} Y\times H \longrightarrow \mathrm{Sp}_k(S\,\square_B A)$$

を引き起す。従って $Y\times_H G = \mathrm{Sp}_k(S\,\square_B A)$ である。

さて、$k\subset S$ より $R = k\,\square_B A \subset S\,\square_B A$。ところで、定理 T(2) より、A は R 上忠実平坦である。従って $(S\,\square_B A)\otimes_R A$ は $S\,\square_B A$ 上忠実平坦である。一方、次のような k 代数の同形射がある。$\xi : (S\,\square_B A)\otimes_R A \xrightarrow{\sim} S\otimes A$, $(\sum_i s_i\otimes a_i)\otimes_R a \mapsto \sum_i s_i\otimes a_i a$

$\xi^{-1}(s\otimes a)=\sum_i\left(\sum_{(a_i)}(s_i\otimes a_{i(1)})\otimes_R \sigma_A(a_{i(2)})a\right)$。ただし、$\sigma_A$ は A の対合射、$\rho_S(s)=\sum_i s_i\otimes\pi(a_i)$　$(a_i\in A)$　とする。今 $(S\square_B A)\otimes_R A$ を $S\square_B A$ 成分で $S\square_B A$ 加群、$S\square_B A\hookrightarrow S\otimes A$ で $S\otimes A$ を $S\square_B A$ 加群とみれば、上の ξ は $S\square_B A$ 線形であることがわかる。従って、$S\otimes A$ も $S\square_B A$ 上忠実平坦である。　q.e.d.

§3　正標数の場合

以下、特にことわらない限り、体 k の標数を $p>0$ とする。目標は次の定理を証明することである。

主定理。　A を代数的閉体 k 上のホップ代数で k 上有限生成な整域、Q を右 A 余加群代数で k 上有限生成な整域とする。仮定(✱)、即ち、「Q に含まれる k の単射包絡 $E_Q(k)$ のうちで、それで生成される Q の部分代数 $\langle E_Q(k)\rangle$ が k 代数として k 上有限生成になるものが少なくとも 1 つある。」が成立しているとする。そうした $E_Q(k)$ に対して、A の右余イデアル部分代数 R で、$\langle E_Q(k)\rangle$ と右 A 余加群代数として同形なものが存在する。さらに、A は R 上忠実平坦になる。

このとき、1 節の場合と同じく、その同形を通して、Q を

R加群とみれば、Qは右(R, A)ホップ加群となり、右A余加群代数として、$Q \simeq (Q/QR^+)\square_{A/AR^+} A$となり、本稿の目標が示される。

さて、1節の場合と違って、A/AR^+が余半単純(これが、$Sp_k(A/AR^+)$が完全可約群ということの定義)であることは、証明せねばならないことである。一般に次のことがいえる。

定理1. Aをホップ代数でk上有限生成、RをAの右余イデアル部分代数とする。Rが単射的右A余加群(簡単にA単射的という)ならば、A/AR^+は余半単純である。

このとき、AがR上忠実平坦になるとは限らない。しかし、$R = \langle E_A(k) \rangle$のときは、AはR上忠実平坦(定理T(2)よりこれは、$R = k\square_{A/AR^+} A$に同値)になる。それを定理の形で述べる前に、$R = \langle E_A(k) \rangle$もA単射的になることを注意しておこう。これは次の定理から出る。(本講究録の土井氏の論文参照)

定理D. Qを右A余加群代数とする。次は同値.

(1) QはA単射的である。

(2) 右A余加群射 $f: A \longrightarrow Q$ で $f(1) = 1$ なるものが存在。

(3) 任意の右(Q, A)ホップ加群はA単射的である。

定理2。　kを代数的閉体、Aをホップ代数でk上有限生成な整域、$R=\langle E_A(k)\rangle$、$H=\mathrm{Sp}_k(A/AR^+)$とする。このとき、Hの単位元を含む連結成分H°は$G=\mathrm{Sp}_k A$の極大トーラスであり、$R=k\square_{A/AR^+}A$が成立する。

以下、これらのことを概説する。まず、定理1を証明するには、これから述べるAがR上忠実平坦であるための判定条件とAが余半単純であるための判定条件を必要とする。

定理3（[12], 命題2.4とその補題）　kの標数は任意でよい。RをAの右余イデアル部分代数とする。

(1)　R^+が巾零イデアルならば、Aは自由R加群である。

(2)　0とR以外にRは右余イデアルかつイデアルなるものを含まないこととAがR上忠実平坦であることは同値

(1)の証明で、中山の補題と誤称している。ブルバキの「可換代数」2章3節2項の命題4というのが正確である。(2)を使って、さらに次のことがいえる。(証明略)

系1。　R, Aを定理と同じとする。任意のRの極大イデアル$\mathfrak{m}$に対して、Aの極大イデアル$\mathfrak{M}$で$R\cap\mathfrak{M}=$

m なるものが　在すれば、AはR上忠実平坦である。

さて、Aが余半単純であることと、Aに右積分τでτ(1) = 1 なるものが存在することは同値であった（[13], 定理 14.0.3)。それは、自明な右A余加群 k がA単射的ということと同値である。なぜなら、τ: A ⟶ k が右積分であることはτが右A余加群射であることに他ならないからである。今の場合（k が正標数 p でAが可換）、Aの余半単純性の判定条件は、Sweedler の永田の定理の一般化の証明方法の系として出てくる。その前に多少定義が必要である。

ホップ代数Aと任意の自然数 n に対して、$A^{(p^n)} = \{ a^{p^n} ; a \in A \}$ とおく。k が完全体ならば、これは部分ホップ代数である。$\mathrm{Sep}_k A = \{ a \in A ; k[a]$ は分離多元環$\}$ とおく。これは部分ホップ代数である。

永田の定理（[14], 定理 4.1）　Aが余半単純で、$\mathrm{Sep}_k A = k$ ならば、Aは余可換である。もし k が代数的閉体ならば Aは群環 $kG(A)$ であり、$G(A)$ のねじれ元は p 巾ねじれ元である。ただし、$G(A)$ はAの群的元全体のつくる乗法群とする。

この定理の証明方法の系として次のことがいえる。(証明略)

系2. A が k 上有限生成なホップ代数で $\mathrm{Sep}_k A = k$ とすれば、A が余半単純であることと、任意の自然数 n に対して、$A/A(A^{(p^n)})^+$ が余半単純であることは同値である。

定理1の証明。 $k = \bar{k}$ としてよい。任意の自然数 n に対し、$A_n = A/A(A^{(p^n)})^+$ とおき、$\pi_n : A \longrightarrow A_n$ を自然なホップ代数射とする。まず、$A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ が余半単純を示す。$\pi_n(R)^+$ は巾零ゆえ定理4(1)より、A_n は $\pi_n(R)$ 自由である。定理T(2)より、A_n は $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 単射的である。R は A 単射的、A は A_n 単射的(定理Tとその後の註より)、今みたように A_n は $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 単射的ゆえ、単射性の推移律より、R は $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 単射的である。ところで、$\Delta(R^+) \subset R^+ \otimes A + k \otimes R^+$ ゆえ $(1 \otimes \pi_n)\Delta(R^+) \subset R^+ \otimes A + k \otimes \pi_n(R)^+$。従って、$\rho'(R^+) \subset R^+ \otimes A_n/A_n(\pi_n(R))^+$。ここで

$$\rho' : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \pi_n} A \otimes A_n \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{can.}} A \otimes A_n/A_n(\pi_n(R))^+ .$$

即ち、R^+ は右 $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 部分余加群となる。$R = k \oplus R^+$ は右 $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 余加群としての直和となるから、k は単射的右 $A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ 余加群となる。故に、永田の定理の前に注意した如く、$A_n/A_n(\pi_n(R))^+$ は余半単純である。

次に $B = A/AR^+$ とおくと、$B_n = A_n/A_n(\pi_n(R))^+ = \left(B/B(\mathrm{Sep}_k B)^+\right)_n$

である。前半より B_n は余半単純。系2より $B/B(\mathrm{Sep}_k B)^+$ は余半単純．定理T(2)よりAは $k\square_{B/B(\mathrm{Sep}_k B)^+}A=(\mathrm{Sep}_k B)\square_B A$ 上忠実平坦でである。整理してみると次の包含関係がある。

$$R \subset k\square_B A = A^G \subset k\square_{B/B(\mathrm{Sep}_k B)^+} A = A^{G^\circ} \subset A \ .$$

A^G は有限群 G/G° による A^{G° の不変　分環ゆえ、A^{G° は A^G 上整である。従って、環の拡大 A/A^G は系1の仮定をみたしている。故にAは $A^G=k\square_B A$ 上忠実平坦である。$AR^+=A(k\square_B A)^+$ ゆえ定理TよりAはB単射的である。単射性の推移律よりRはB単射的である。ところで、$R=k\oplus R^+$ は右B余加群としての直和になっているから、kはB単射的、即ち、Bは余半単純である。　　　　q.e.d.

次に定理2の証明について述べる。

補題1。　kを完全体、Aをホップ代数、Qを右A余加群代数とする。A，Qともに被約、またRはA単射的と仮定する。$E=E_Q(k)$ について次のことが成立する。

(1)　$x\in Q$ について、$x^{p^n}\in E\ (\exists n\in\mathbb{N})$ ならば、$x\in E$ 。

(2)　$E^{(p^n)}=\{x^{p^n};\ x\in E\}$ とおいた時、$E^{(p^n)}\subseteq E\ (\forall n\in\mathbb{N})$ 。

証明は省略する。このことから、次のことがいえる。$P\subset Q$ かつPもA単射的とする。$E^{(p^n)}\subset P\ (\exists n\in\mathbb{N}) \Rightarrow P\supset\langle E\rangle$ 。

命題1。 kを代数的閉体、Aをホップ代数、$R=\langle E_A(k)\rangle$とする。さらにAをk上有限生成な整域と仮定する。$G=\mathrm{Sp}_k A$, $H=\mathrm{Sp}_k(A/AR^+)$とする。このとき、H°はGの極大トーラスである。ただし、H°はHの単位元を含む連結成分とする。

証明。 定理1と永田の定理より、$\mathcal{O}(H^\circ)=k\mathcal{G}(\mathcal{O}(H^\circ))$、即ち$H^\circ$は乗法型。[5], Exposé XI, 5.3と5.3 bisより、中心化群$C_G(H^\circ)$はsmoothである。従って、Gの極大トーラスTでH°を含むものが存在する。故に、

$$k\,\square_{\mathcal{O}(H^\circ)} A \cong (k\,\square_{\mathcal{O}(H^\circ)}\mathcal{O}(T))\,\square_{\mathcal{O}(T)} A \simeq \mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})\,\square_{\mathcal{O}(T)} A$$

$$\mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})^{(p^n)}\,\square_{\mathcal{O}(T)} A \supset (\mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})\,\square_{\mathcal{O}(T)} A)^{(p^n)} \supset R^{(p^n)} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

従って、補題1より、$R\subset \mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})^{(p^n)}\,\square_{\mathcal{O}(T)} A$ $(\forall n\in\mathbb{N})$である。
故に、$R\subset \bigcap_n(\mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})^{(p^n)}\,\square_{\mathcal{O}(T)} A)=(\bigcap_n \mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})^{(p^n)})\,\square_{\mathcal{O}(T)} A=k\,\square_{\mathcal{O}(T)} A$
なぜならば、[14], 2.12より$\bigcap_n \mathcal{O}(\widetilde{H^\circ\backslash T})^{(p^n)}=k$だからである。
即ち、$AR^+\subset A(k\,\square_{\mathcal{O}(T)} A)^+$。ところで、定理T(2)より$\mathcal{O}(T)=A/A(k\,\square_{\mathcal{O}(T)} A)^+$ゆえ$H=\mathrm{Sp}_k(A/AR^+)\supset \mathrm{Sp}_k\,\mathcal{O}(T)=T$。故に$H^\circ=T$。
q.e.d.

残るは、$R=k\,\square_{A/AR^+} A$を示すことである。それにはRのクルル次元を計算する必要がある。それを$K.\dim R$で表わす。

まず上の命題からでることを注意しておくと、$K.\dim \mathcal{O}(H\tilde{\backslash}G) = K.\dim \mathcal{O}(T\tilde{\backslash}G) = \dim T\tilde{\backslash}G$ である。勿論、$\dim T\tilde{\backslash}G$ は極大トーラスの取り方によらない。

Qを右A余加群代数、$x \in Sp_k Q(k)$ とする。xでの軌道射とは、右A余加群代数射 $\pi_x : Q \longrightarrow A$, $q \mapsto \sum x(q_{(0)}) q_{(1)}$ をいう。次の命題の証明は省略する。

命題2。　kを完全体とする。Qを単射的右A余加群代数で、$Q = \langle E_Q(k) \rangle$ なるものとする。$x \in Sp_k Q(k)$, π_xをxでの軌道射、$\mathfrak{n} = \mathrm{Ker}\, \varepsilon\pi_x = \mathrm{Ker}\, x$、$\mathfrak{n}^{[p]}$ を $\mathfrak{n}^{(p)} = \{ y^p ; y \in \mathfrak{n} \}$ で生成されたQのイデアルとする。このとき $Q/\mathfrak{n}^{[p]}$ は単射的右 $A/A(A^{(p)})^+$ 余加群代数で、任意の $E_{Q/\mathfrak{n}^{[p]}}(k)$ に対し $Q/\mathfrak{n}^{[p]} = \langle E_{Q/\mathfrak{n}^{[p]}}(k) \rangle$ となる。

さて、k代数Bが高さn以下とは、Bが局所ネーター環で剰余体がkに等しく、最大イデアルの任意の元xに対して、$x^{p^n} = 0$ をみたすときにいう。Bが高さn以下で普遍的とは、$B \simeq k[T_1, \ldots, T_m]/(T_1^{p^n}, \ldots, T_m^{p^n})$, ただし、$T_1, \ldots, T_m$ は不定元のときにいう。次も鍵になる補題である。

補題2（[4], III, §3, 3.8）　Bを高さn以下のk代数とす

る。S を B の部分代数で、$\mathfrak{m}$ を S の最大イデアルとする。B が自由 S 加群で $B/\mathfrak{m}B$ が高さ n 以下で、普遍的ならば S 代数として $B \simeq S \otimes (B/\mathfrak{m}B)$ である。この条件下で、B と S が高さ n 以下で普遍的なことは同値である。

以下、$k=\bar{k}$，A を k 上有限生成な整域とする。さらに次のことを固定しておく。(1) $G=\mathrm{Sp}_k A$ (2) $\ell = \mathrm{K.dim}\, A = \dim G$ (3) $m=\dim G - \dim T$，ただしTは極大トーラス。

補題3。 F を A に包まれる k の右 $A/A(A^{(p)})^+$ 余加群としての単射包絡とする。F で生成される A の右余イデアルは k の本質的拡大と仮定する。P を N で生成された右余イデアル代数とすれば、$\mathrm{K.dim}\, P = m$ である。

補題4。 R，U を A の右余イデアル部分代数で、U は R を含むとする。このとき、k 代数同形射

$$U \otimes_R A \xrightarrow{\sim} (U/UR^+) \otimes A, \quad u \otimes_R a \longmapsto \sum (u_{(1)} \bmod UR^+) \otimes u_{(2)} a$$

を得る。

これらの証明は省略する。定理2の残された部分を示す。即ち、次の定理を証明する。

定理2′。 $R = \langle E_A(k) \rangle$ とすれば、$R = k\square_{A/AR^+}A$ である。

特に、R は k 上有限生成である。

証明。 F を $A/A(A^{(p)})^+$ 余加群としての k の単射包絡で、$E = E_A(k)$ に含まれるものとする。F で生成される右余イデアル N は補題3の条件をみたす。さて AR^+ の $\overbrace{\text{生成系}}^{\text{有限個の元からなる}}$（イデアルとしての）を E から選ぶ。それらの生成する右余イデアルは有限次元である。P と Q を各々 N, N+M で生成された右余イデアル部分代数とする。それらは、k 上有限生成な k 代数であること、並びに $AR^+ = AQ^+$ なることを指摘しておく。$H = \mathrm{Sp}_k\, A/AR^+$ $U = \mathcal{O}(H\backslash G)$ とおく。$U = k\square_{A/AR^+}A$ であった。

まず、最初に Q の元 f で、局所化 U_f, Q_f が等しくなるものの存在をいう。補題4で R を Q とれば $U\otimes_Q A \simeq (U/UQ^+)\otimes A$。A は U 上忠実平坦ゆえ $(UQ^+)A \cap UQ^+$、かつ $(AU^+)\cap U = U^+$。一方、$A(UQ^+) = AQ^+ = AR^+ = AU^+$。従って $UQ^+ = U^+$。故に、上の同形は

$$(*) \quad U\otimes_Q A \xrightarrow{\sim} A, \quad u\otimes_Q a \mapsto ua$$

となる。生成的平坦性より、Q の元 f で A_f が Q_f 自由になるものが存在する。従って、上の同形(*)より $Q_f = U_f$ を得る。特に、$\mathrm{K.dim}\, Q = \mathrm{K.dim}\, U = m$ である。

$X = \mathrm{Sp}_k\, Q$ とおき、$x \in X(k)$, π_x を x での軌道射とする。

2番目に、π_x は右A余加群代数の単準同形であることを示す。$\pi_x(1)=1$ ゆえ $\pi_x|_N$ は同形射である。従って $\pi_x(F)$ も k の $A/A(A^{(p)})^+$ 単射包絡であり、$\pi_x(N)$ は $\pi_x(F)$ で生成される右A余加群で、補題3の仮定を満足している。故に $\pi_x(N)$ で生成される右余イデアル部分代数 $\pi_x(P)$ のクルル次元は m である。$m = K.\dim Q \geqq K.\dim \pi_x(Q) \geqq K.\dim \pi_x(P) = m$ ゆえ、Q と $\pi_x(Q)$ のクルル次元は等しい。故に、π_x は単準同形である。

最後に、$Q=U$ を示す。これがいえれば、$Q \subseteq R \subseteq U = k\square_{A/AR^+}A$ ゆえ、定理の主張はすべていえる。さて、$\operatorname{Ker}\pi_x = 0$ ゆえ、$X = x$ の軌道の閉包となる。最初に見た如く $U_f = Q_f$ ゆえ、$H\backslash G \longrightarrow X$ は開はめこみである。もし X の点 x で $H\backslash G$ に含まれないものがあれば、$X=x$ の軌道の閉包とはなり得ない。故に $H\backslash G \simeq X$。故に、$Q = \mathcal{O}(H\backslash G) = U$ である。q.e.d.

<u>主定理の証明。</u> $x \in \operatorname{Sp}_k P(k)$、$R = \pi_x(P)$ とおく。ただし π_x は x での軌道射とする。x が単純点の時、π_x が同形射であることを証明する。$\mathfrak{m} = \operatorname{Ker} x$ とする。$A/A(A^{(p)})^+ = B$ とおく。次の右B余加群の完全系列を考える。($\bar{\pi}_x$ は π_x から引き起される)

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ker}\pi_x + \mathfrak{m}^{[p]})/\mathfrak{m}^{[p]} \longrightarrow P/\mathfrak{m}^{[p]} \xrightarrow{\bar{\pi}_x} R/(R^+)^{[p]} \longrightarrow 0$$

$(\operatorname{Ker}\pi_x + \mathfrak{m}^{[p]})/\mathfrak{m}^{[p]}$ は右 $(P/\mathfrak{m}^{[p]}, B)$ ホップ部分加群(勿論 $P/\mathfrak{m}^{[p]}$ の)になっていることに注意しておく。命題2より、$P/\mathfrak{m}^{[p]}$ は単射的

右B余加群代数である。従って、定理Dより $(\mathrm{Ker}\,\pi_x+\mathfrak{m}^{[p]})/\mathfrak{m}^{[p]}$ もB単射的である。従って上の系列は分裂する。分裂を与える右B余加群射を ψ とする。$\pi_x\psi = id$ より $\psi(R^+/(R^+)^{[p]}) \subseteq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{[p]}$。省略したが、補題3の証明で、$R/(R^+)^{[p]}$ は高さ1以下で普遍的であることを示した。即ち、$R/(R^+)^{[p]} = k[T_1,\cdots,T_m]/(T_1^p,\cdots,T_m^p)$ かつ $R^+/(R^+)^{[p]} = (T_1,\ldots,T_m)/(T_1^p,\ldots,T_m^p)$。$\psi(R^+/(R^+)^{[p]}) \subseteq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{[p]}$ ゆえ、k代数射 Φ を $\Phi(T_i)=\psi(T_i)$ $(1\le i\le m)$ で定義できる。ψ が右B余加群射ゆえ Φ もそうなる。即ち、Φ は右A余加群代数射となる。命題2より $R/(R^+)^{[p]}$ は自分に含まれるkのB単射包絡Fによって生成されているから、$\mathrm{Im}\,\Phi = \langle\Phi(F)\rangle$ である。ところで、$\Phi(F)$ もkのB単射包絡であるから、再び命題2より $P/\mathfrak{m}^{[p]} = \langle\Phi(F)\rangle$ である。故に Φ は全射である。従って、

$\dim_k(R/(R^+)^{[p]}) \ge \dim_k P/\mathfrak{m}^{[p]}$。故に $\dim_k R/(R^+)^{[p]} = \dim_k P/\mathfrak{m}^{[p]}$。

さて、x が単純点ならば、$\dim_k P/\mathfrak{m}^{[p]} = p^{K.\dim P}$ がいえる。一方、$\dim_k R/(R^+)^{[p]} = p^{K.\dim R}$ だから、$K.\dim P = K.\dim R$ が結論される。これから、$\mathrm{Ker}\,\pi_x = 0$、即ち、π_x は単準同形である。

AがR上忠実平坦になることは、Rがkの単射包絡 $\pi_x(E_Q(k))$ で生成されていることに注意すれば、既に定理2で得られている。

q.e.d.

導入部で述べた、X/G と Y/H がアフィンスキームになる

のは同値である云々については省略する。 終

References

[1] E. Abe, Hopf algebra, Cambridge Univ. Press, 1980.

[2] G.P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Graduate tests in Math. 75, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[3] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott, Induced modules and affine quotients, Math. Ann. 230 (1977). 1-14.

[4] M. Demazure and P. Gabriel, Groupes algébriques, tome I, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[5] M. Demazure and A. Grothendieck, Schémas en groupes II (SGA 3), Lecture Notes in Math. Vol.152, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[6] Y. Doi, Homological coalgebra, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 31-50.

[7] Y. Doi, On the structure of relative Hopf modules, to appear.

[8] S. Donkin, Hopf complements and injective comodules, Proc. London Math. Soc., (3) 40 (1980), 298-319.

[9] J.A. Green, Locally finite representations, J. Algebra, 41 (1976), 137- 171.

[10] E. Kunz, Characterizations of regular local rings at characteristic p, Amer. J. Math., 19 (1969), 772-784.

[11] H. Shigano, A correspondence between observable Hopf ideals and left coideal subalgebras, Tsukuba J. Math., 1 (1977), 149-156.

[12] H. Shigano, On observable and strongly observable Hopf ideals, Tsukuba J. Math., 6-1 (1982), 127-150.

[13] M.E. Sweedler, Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.

[14] M.E. Sweedler, Connected fully reducible affine group schemes in positive characteristic are abelian, J. Math. Kyoto Univ., 11-1 (1971), 51-70.

[15] M. Takeuchi, A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras, Manuscripta Math., 7 (1972), 251-270.

[16] M. Takeuchi, Relative Hopf modules — Equivalences and freeness criteria —, J. Algebra, 60 (1979), 452-471.

[17] M. Takeuchi, Formal schemes over fields, Comm. in Algebra, 5 (1977), 1483-1528.